Πρώτο τεστ Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι

Διάρκεια 2 Ώρες

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

Θέμα 1
Να υπολογίσετε (αναλυτικά) τους μιγαδικούς αριθμούς

(i) $\log(i^i)$

(ii) $(1+i)_k^{2/3},\ k \in \mathbb{Z}$

(iii) $\sqrt[4]{1-i}$

(iv) $\log\left(\log(1+i\sqrt{3})\right)$

(v) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{4k},\ k \in \mathbb{Z}$

(vi) $(\sqrt{3}+i)^{99}$.

Θέμα 2
Να λύσετε την εξίσωση :

$$\bar{z} = z^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Θέμα 3
Να δείξετε ότι η εξίσωση :

$$(1+iz)^n = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i},\ n \in \mathbb{N},$$

δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Θέμα 4

(i) Αν $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ και $\lambda > 0$, να αποδείξετε ότι $\operatorname{Arg}(\lambda z) = \operatorname{Arg}(z)$.

(ii) Να αποδείξετε ότι αν $z \in \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$, τότε $\operatorname{Arg}(z) = -\operatorname{Arg}(\bar{z})$ και αν $z \in (-\infty, 0]$, τότε $\operatorname{Arg}(z) = \operatorname{Arg}(\bar{z}) = \pi$.

Θέμα 5
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(z) = e^z,\ z \in \mathbb{C}$ και $g(z) = \log z,\ z \in \mathbb{C}^*$.

(i) Αν $x_0 \in \mathbb{R}$ και $A = \{x_0 + it : t \in \mathbb{R}\}$ δείξτε ότι $f(A) \subseteq C(0, r)$ όπου $C(0, r)$ κύκλος κέντρου 0 και ακτίνας $r = e^{x_0}$.

(ii) Αν $B = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = \pi\}$ δείξτε ότι $g^{-1}(B) = (-\infty, 0)$, όπου

$$(-\infty, 0) \coloneqq \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) < 0,\ \operatorname{Im}(w) = 0\}.$$

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!